# Fonction définie par une intégrale

## Etude de fonctions définies par une intégrale

**Exercice 1** [ 00531 ] [correction]
Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$.
a) Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.
b) A l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.
c) Montrer que $f$ est continue est décroissante.
d) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

**Exercice 2** [ 00532 ] [correction]
Soit

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

a) Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = 1/u$.
b) Etudier les variations de $g$ sur son domaine de définition.
c) Etudier la limite de $g$ en $+\infty$.

**Exercice 3** [ 00533 ] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $f$ est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Etudier les variations de $f$.
b) Déterminer les limites de $f$ en $0^+$ et $+\infty$.
c) Déterminer un équivalent de $f$ en $0^+$ et $+\infty$.

**Exercice 4** [ 00534 ] [correction]
a) Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

b) Justifier la continuité de $f$ sur son domaine de définition.
c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et la limite de $f$ en $+\infty$.

**Exercice 5** [ 00535 ] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$.
b) Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.
c) On note $g$ l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer

$$g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

d) Conclure

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**Exercice 6** [ 00536 ] [correction]
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que $f$ est définie et positive sur $]-1, +\infty[$.
b) Montrer que $f$ est $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie.
c) Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
d) On pose pour $x > 0$, $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$.
Montrer que $\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$. Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
e) Déterminer un équivalent à $f$ en $-1^+$.

**Exercice 7** [ 00537 ] [correction]
Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

**Exercice 8** [ 00538 ] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $f$ est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

**Exercice 9** [ 00540 ] [correction]
Soit $f$ une application continue de $\mathbb{R} \times [a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Expliquer pourquoi $f$ est uniformément continue sur $S \times [a,b]$ pour tout segment $S$ de $\mathbb{R}$.
En déduire que $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{xt}\mathrm{d}t$. A l'aide de la question précédente, étudier la continuité de $g$. Retrouver le résultat en calculant $g(x)$.

**Exercice 10** Centrale MP [ 00541 ] [correction]
On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

b) Montrer que $f$ et $g$ sont continues en 0
c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 11** [ 00542 ] [correction]
a) Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
b) Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
Déterminer la limite de $F$ en $+\infty$.
c) Justifier que $F$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'$
d) En admettant la continuité de $F$ en 0 déterminer la valeur de $I$.

**Exercice 12** [ 00543 ] [correction]
Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \geqslant 0$, on pose $f(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{sinc}t$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,t)\mathrm{d}t$.
a) Montrer que $u_n(x) = (-1)^n \int_0^\pi g_n(x,u)\mathrm{d}u$ avec $g_n(x,u)$ qu'on explicitera.
b) Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
c) On pose $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Justifier que $U$ est continue et expliciter $U$ sous la forme d'une intégrale convergente.
d) Montrer que $U$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $U'(x)$.
e) Expliciter $U(x)$ pour $x > 0$ puis la valeur de $U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

**Exercice 13** [ 00544 ] [correction]
Soient $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues.
Montrer que $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue.

**Exercice 14** Centrale MP [ 02491 ] [correction]
On considère la fonction suivante $I$ définie par :
$\forall x \in \mathcal{D}, I(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\ \mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$.
b) Montrer que $I$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
c) Calculer $I(0), I(1), I(2), I(3), I(4)$.
d) Trouver une relation simple entre $I(x+2)$ et $I(x)$.
e) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Que vaut $I(n)I(n-1)$ ?
f) Déterminer des équivalents simples de $I$ aux extrémités de $\mathcal{D}$.

**Exercice 15** Mines-Ponts MP [ 02878 ] [correction]
a) Pour quels $x$ de $\mathbb{R}$ l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$$

existe-t-elle ? Dans ce cas, soit $f(x)$ sa valeur.
b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son intervalle de définition.
c) Que dire de

$$x \mapsto (x+1)f(x)f(x+1)?$$

**Exercice 16** Mines-Ponts MP [ 02871 ] [correction]
On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$.
a) définition de $f$.
b) Continuité et dérivabilité de $f$.
c) Ecrire $f(1)$ comme somme de série.

**Exercice 17** Mines-Ponts MP [ 02875 ] [correction]
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, soit $f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que $f$ est définie et continue sur $\Omega$.
b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x$ tend vers $-1$.
c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\mathrm{Re}z \to +\infty$.

**Exercice 18** Mines-Ponts MP [ 02880 ] [correction]
Montrer que, pour tout $x$ réel positif, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 19** Mines-Ponts MP [ 02882 ] [correction]
On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et trouver des équivalents simples de $f$ en 0 et en $+\infty$.

**Exercice 20** [ 00294 ] [correction]
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0$$

a) Montrer qu'on a pour tout $x \in I$

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(t)\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire que $f(x) = (x-a)^\alpha g(x)$ avec

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x-a))\,\mathrm{d}\theta$$

c) Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Exercice 21** Centrale MP [ 03211 ] [correction]
On considère

$$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer la définie et la continuité de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et montrer que

$$\varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{iu}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \to 0^+$.
d) La fonction $\varphi$ est-elle dérivable en 0 ?

**Exercice 22** [ 03313 ] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que $f$ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont $f$ est solution.
c) Montrer que $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
d) Exploiter l'équation différentielle précédente pour former ce développement.

**Exercice 23** [ 03324 ] [correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_{-x}^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2-t^2}}$$

a) Montrer que $f$ est définie et continue.
b) Déterminer les limites de $f$ en $0^+$ et $+\infty$.

# Expression de fonctions définies par une intégrale

**Exercice 24** [ 00545 ] [correction]
On considère la fonction

$$f : x \in \left]-1, +\infty\right[ \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $f$ est bien définie.
b) Exprimer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

**Exercice 25** [ 00546 ] [correction]
a) Justifier l'existence et calculer

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

b) Justifier que $F$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle

$$\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leqslant |u|$$

c) Justifier que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $F'(x)$.
d) En déduire $F(x)$.

**Exercice 26** CCP MP [ 03311 ] [correction]
Soient $a, b$ deux réels strictement positifs.
a) Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt) \,\mathrm{d}t$$

b) Justifier que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
c) Exprimer $F(x)$

**Exercice 27** [ 00547 ] [correction]
On pose

$$z : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+ix)t^2} \,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $z$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$$

b) En déduire l'expression de $z(x)$ sachant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**Exercice 28** [ 00548 ] [correction]
On pose $z : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$ et on donne $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
a) Justifier et calculer $z(0)$.
b) Montrer que $z$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$.
c) En déduire l'expression de $z(x)$.

**Exercice 29** [ 00549 ] [correction]
En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx} \mathrm{d}t$$

**Exercice 30** [ 00550 ] [correction]
Soit $F$ la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

a) Montrer que $F$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
b) Déterminer l'expression de $F(x)$.
c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

**Exercice 31** [ 00551 ] [correction]
Soit
$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + 2t\cos x + t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$$
a) Justifier que $F$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$
b) Calculer $F'(x)$ sur $[0, \pi/2]$
c) Donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$ sachant
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

**Exercice 32** [ 00552 ] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x > 0$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$.
a) Justifier l'existence de $I_n(x)$.
b) Calculer $I_1(x)$.
c) Justifier que $I_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $I_n'(x)$.
d) Exprimer $I_n(x)$.

**Exercice 33** [ 00553 ] [correction]
Soit
$$F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ avec } x, y > 0$$
Pour $y > 0$, montrer que $x \mapsto F(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et calculer
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$$
En déduire la valeur de $F(x, y)$.

**Exercice 34** Centrale MP [ 00554 ] [correction]
Existence et calcul de
$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\mathrm{d}t$$

**Exercice 35** [ 00555 ] [correction]
Ensemble de définition, dérivée et valeur de
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2t^2)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice 36** [ 00556 ] [correction]
Soit $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$ sur $[0, +\infty[$.
a) Justifier que $F$ est bien définie et continue.
b) Etudier la dérivabilité sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée via le changement de variable $u = \tan t$.
c) Etablir que $F(x) = \pi(\ln(1 + \sqrt{1 + x}) - \ln 2)$.

**Exercice 37** [ 02638 ] [correction]
On pose, pour $t \geqslant 0$,
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{1 - \cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
a) Montrer que $F$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
b) Montrer que $F$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F''(t)$.
c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

**Exercice 38** Centrale MP [ 02486 ] [correction]
On pose
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \ln t\, \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
a) Préciser le domaine de définition de $f$.
b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une équation différentielle vérifiée par $f$.
c) Calculer $f(1)$ avec un logiciel de calcul forme et en déduire explicitement $f$.
d) Retrouver ce résultat par une méthode plus simple.

**Exercice 39** Mines-Ponts MP [ 02872 ] [correction]
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, soit
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$
a) Justifier la définition de $f(x)$.
b) Montrer que $f$ est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
c) Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.
d) Montrer que $f$ est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

**Exercice 40** Mines-Ponts MP [ 02873 ] [correction]
Pour tout $x$ réel, on pose $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Existence et calcul de ces deux intégrales.

**Exercice 41** Mines-Ponts MP [ 02874 ] [correction]
Etudier $f:x\mapsto\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 42** Mines-Ponts MP [ 02876 ] [correction]
Existence et calcul de

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

**Exercice 43** Mines-Ponts MP [ 02881 ] [correction]
Existence et calcul de $\int_0^{2\pi}\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 44** [ 03312 ] [correction]
a) Montrer que pour tout $x>-1$

$$\int_0^1\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\ln 2}{2}\arctan x+\frac{\pi}{8}\ln(1+x^2)-\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice 45** [ 03323 ] [correction]
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $F$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
c) Former une équation différentielle vérifiée par $F$ sur $]0,+\infty[$.
d) En déduire une expression simple de $F$ sur $\mathbb{R}$.

# Fonction Gamma

**Exercice 46** [ 00557 ] [correction]
On rappelle que la valeur de $\Gamma(1/2)$ est connue.
En déduire les valeurs de $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

**Exercice 47** [ 00558 ] [correction]
Sachant $\Gamma'(1)=-\gamma$, calculer $\Gamma'(2)$.

**Exercice 48** [ 00559 ] [correction]
Sans calculer $\Gamma''$, établir que la fonction $\Gamma$ est convexe.

**Exercice 49** [ 00560 ] [correction]
Démontrer que la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

**Exercice 50** [ 00561 ] [correction]
a) Démontrer que la fonction $\Gamma$ donnée par

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
b) Démontrer que la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
c) En exploitant l'inégalité de Cauchy Schwarz, établir que la fonction $x\mapsto\ln\Gamma(x)$ est convexe.

**Exercice 51** [ 00562 ] [correction]
L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que pour tout $t\in[0,n]$,

$$0\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\leqslant\mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}$$

b) Etablir que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

c) Observer que

$$\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

d) Conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$ où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.

**Exercice 52** [ 02635 ] [correction]
On rappelle $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que cette fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$.
On étudiera la régularité en se restreignant à $x \in [a,b] \subset ]0,+\infty[$.
b) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
c) En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en $\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y$ où $f_n(y) = 0$ pour $y \leqslant -\sqrt{x}$, $0 \leqslant f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{t} < y \leqslant 0$ et $0 \leqslant f_n(y) \leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y}$ pour $y > 0$ et $t \geqslant 1$.
d) En appliquant le théorème de convergence dominée établir la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}$.

**Exercice 53** X MP [ 02952 ] [correction]
a) Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(a) > 0$. Donner un équivalent de $u_n = a(a+1)\dots(a+n)$.
b) Montrer que la fonction $\Gamma$ ne s'annule pas sur $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} z > 0\}$.

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
a) Posons $g(x,t)=\frac{1}{1+x^3+t^3}$.
$\forall x\in\mathbb{R}^+$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g(x,t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^3}$ donc $f(x)$ existe.
b) $u\mapsto 1/u$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$.
On peut réaliser le changement de variable $t=1/u$ qui donne
$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=\int_0^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$.
Donc $2f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}=\left[\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt3}\right]_0^{+\infty}=\frac{4\pi}{3\sqrt3}$ puis $f(0)=\frac{2\pi}{3\sqrt3}$
c) $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ avec $|g(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+t^3}=\varphi(t)$ et $\varphi$ intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $f$ est continue.
Si $x\leqslant y$ alors $\forall t\in[0,+\infty[\,,g(y,t)\leqslant g(x,t)$ donc $f(y)\leqslant f(x)$. Ainsi $f$ est décroissante.
Rq : On peut aussi montrer $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ mais cela alourdit.
d) $0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x^3+t^3}\underset{t=xu}{=}\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}\underset{x\to+\infty}{\to}0$.

**Exercice 2 :** [énoncé]
a) $t\mapsto\frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $g(0)$ existe.
$u\mapsto 1/u$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$.
On peut réaliser le changement de variable $t=1/u$ qui donne
$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=\int_0^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$.
Donc $2g(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}=\left[\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt3}\right]_0^{+\infty}=\frac{4\pi}{3\sqrt3}$ puis $g(0)=\frac{2\pi}{3\sqrt3}$
b) La fonction $g$ est paire. Pour $0\leqslant x\leqslant x'$, on a pour tout $t\geqslant0$, $\mathrm{e}^{-tx^2}\geqslant\mathrm{e}^{-tx'^2}$ donc $g$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
c) Pour $x>0$, $0\leqslant g(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}\to0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

**Exercice 3 :** [énoncé]
a) $g(x,t)=\frac{\cos t}{t+x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}\times[0,\pi/2]$.
$g$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^{+\star}\times[0,\pi/2]$ donc (intégration sur segment) $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x)=-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{(t+x)^2}\mathrm{d}t\leqslant0$$

Ainsi $f$ est décroissante.
b) Quand $x\to+\infty$,

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{\pi/2}\frac{1}{x+t}\mathrm{d}t\to0$$

Quand $x\to0^+$

$$f(x)\geqslant\int_0^{\pi/4}\frac{\cos t}{t+x}\mathrm{d}t\geqslant\frac{\sqrt2}{2}\left[\ln(t+x)\right]_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt2}{2}\ln\frac{x+\pi/4}{x}\to+\infty$$

c)

$$\frac{1}{x+\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\frac1x\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac1x$$

On sait :

$$\forall 0\leqslant t\leqslant\pi/2, 1-\frac12t^2\leqslant\cos t\leqslant1$$

donc

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{t+x}-\frac12\int_0^{\pi/2}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x}\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{t+x}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{t+x}=\ln\frac{x+\pi/2}{x}\underset{0}{\sim}-\ln x$$

et

$$0\leqslant\int_0^{\pi/2}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x}\leqslant\int_0^{\pi/2}t\,\mathrm{d}t=C=o(\ln x)$$

donc

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}-\ln x$$

**Exercice 4 :** [énoncé]
a) La fonction $t\mapsto\frac{t^{x-1}}{1+t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1]$.
Quand $t\to0^+$, $\frac{t^{x-1}}{1+t}\sim t^{x-1}=\frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$
donc $t\mapsto\frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$.
b) Posons $g(x,t)=\frac{t^{x-1}}{1+t}$ sur $]0,+\infty[\times]0,1]$.
$t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$,
$x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour $a > 0$, pour tout $x \geqslant a$, $|g(x,t)| \leqslant \frac{t^{a-1}}{1+t} \leqslant t^{a-1} = \varphi_a(t)$ avec $\varphi_a$ intégrable sur $]0,1]$.
Par domination sur tous segment de $]0,+\infty[$, on peut affirmer que $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.
c) $f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.
d) Quand $x \to 0^+$, $f(x+1) \to f(1)$ donc $f(x+1) = o(1/x)$ puis $f(x) \sim 1/x$.
Quand $x \to +\infty$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \to 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

**Exercice 5 :** [énoncé]
a) Les fonctions

$$g : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto -\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$$

sont continues sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ donc, par intégration sur segment, la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

b) On a

$$f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Pour $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}$$

donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
c) $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

On a alors

$$\left(g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2\right)' = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

car

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u$$

L'évaluation en 0 permet de conclure.

d) Pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**Exercice 6 :** [énoncé]
a) $t \mapsto (\sin t)^x$ est définie, continue et positive sur $]0,\pi/2]$.
Quand $t \to 0$, $(\sin t)^x \sim t^x$ avec $x > -1$ donc $t \mapsto (\sin t)^x$ est intégrable sur $]0,\pi/2]$.
Ainsi $f$ est définie et positive sur $]-1,+\infty[$
b) Soit $a > -1$.
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(\sin t)(\sin t)^x$ est définie continue en $x$ et continue par morceaux en $t$ sur $[a,+\infty[\times]0,\pi/2]$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln(\sin t)(\sin t)^a| = \varphi(t)$ avec $\varphi$ est intégrable sur $]0,\pi/2]$ car pour $\alpha$ tel que $-a < \alpha < 1$, $t^\alpha\varphi(t) \sim t^{a+\alpha}\,|\ln(t)| \to 0$. Par domination sur tout segment, $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et
$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)(\sin t)^x\mathrm{d}t \leqslant 0$. Ainsi $f$ est décroissante.
c) $f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = f(x) - \left[\frac{(\sin t)^{x+1}}{x+1}\cos t\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{x+1}f(x+2)$
donc $f(x+2) = \frac{x+1}{x+2}f(x)$.
d) $\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x)$.
$\varphi(1) = f(0)f(1) = \pi/2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) = \pi/2$.
e) $\varphi$ est continue et quand $x \to 0$, $\varphi(x) = \varphi(1+x) \to \varphi(1) = \pi/2$.
Quand $x \to 0$, $f(x) \to f(0) = \pi/2$ donc quand $x \to -1$, $f(x) = \frac{\varphi(x+1)}{(x+1)f(x+1)} \sim \frac{1}{x+1}$.
Rq : En fait on peut montrer que $\varphi$ est une fonction constante.

**Exercice 7 :** [énoncé]
a) $g : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$ est définie continue en $x$ et continue par morceaux en $t$ sur $\mathbb{R}^+ \times [0,+\infty[$ avec

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

et $\varphi$ intégrable sur $[0,+\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue en $x$ et continue par morceaux en $t$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times [0,+\infty[$.
Pour $x \in [a,+\infty[$ (avec $a > 0$) on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-xt^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at^2} = \psi(t)$$

avec $\psi$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Enfin,

$$f(x)-f'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{x}t}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

**Exercice 8 :** [énoncé]
$F:(t,x)\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$, $\frac{\partial F}{\partial x}:(t,x)\mapsto -t\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}:(t,x)\mapsto t^2\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+\star}$. Sur $\mathbb{R}^+\times[a,+\infty[$ (avec $a>0$) ces fonctions sont dominées par $\varphi(t)=\mathrm{e}^{-at}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Par suite $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et
$f''(x)+f(x) = \int_0^{+\infty} t^2\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.
$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\to 0$.

**Exercice 9 :** [énoncé]
$S\times[a,b]$ est compact et toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.
Etudions la continuité de $F$ en $\alpha\in\mathbb{R}$ et considérons $S=[\alpha-1,\alpha+1]$.
$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall(x,t),(x',t')\in S\times[a,b]\,,\|(x,t)-(x',t')\|_\infty\leqslant\eta\Rightarrow$
$|f(x,t)-f(x',t')|\leqslant\varepsilon$
Donc pour $|x-\alpha|\leqslant\eta$, on a $|F(x)-F(\alpha)|\leqslant\int_a^b\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon(b-a)$. Ainsi $F$ est continue en $\alpha$.
$(x,t)\mapsto\mathrm{e}^{xt}$ est continue par opérations donc $g$ l'est aussi par intégration sur un segment.
Pour $x\neq 0$, $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ et $g(0)=1$. Sans difficultés $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 10 :** [énoncé]
a) Posons

$$\tilde{f}(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$$

Les fonctions $\tilde{f}$, $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}$.
Sur $[a,+\infty[$, on a les dominations

$$|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+t^2},\left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2}\text{ et }\left|\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant\frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2}$$

Les fonctions dominantes étant intégrables, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On a alors

$$f(x)+f''(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Posons

$$\tilde{g}(x,t) = \frac{\sin t}{x+t}$$

Les fonctions $\tilde{g}$, $\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}$.
La fonction $x\mapsto\int_0^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ (intégrale convergente via intégration par parties)
Sur $[a,+\infty[$, on a les dominations

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{(a+t)^2}\text{ et }\left|\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(x,t)\right|\leqslant\frac{2}{(a+t)^3}$$

Les fonctions dominantes étant intégrables, on peut affirmer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$g''(x) = \int_0^{+\infty}\frac{2\sin t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

Par une intégration par parties

$$g''(x) = \left[-\frac{\sin t}{(x+t)^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}-g(x)$$

b) Pour $x\in\mathbb{R}^+$,

$$\left|\tilde{f}(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

donc $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

$$g(x)-g(0) = -\int_0^{+\infty}\frac{x\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t = x\int_0^1\frac{\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{x\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t$$

mais

$$\left|x\int_0^1\frac{\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant x\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)} = x\ln(x+1)-x\ln x\to 0$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{x\sin t}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right|\leqslant x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\to 0$$

donc $g$ est continue en 0.
c) On a

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et

$$|g''(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{2\,|\sin t|}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2\,|\sin t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{x} - g''(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $f - g \underset{+\infty}{\to} 0$ ce qui permet via résolution de l'équation différentielle de conclure

$$f = g$$

On en déduit $g(0) = f(0)$ i.e.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 11 :** [énoncé]
a) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$
Or $\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ admet $-\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ pour limite quand $x \to +\infty$ car cette dernière intégrale est bien définie. Cela permet de conclure à la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
b) Puisque $\forall t > 0$, $|\sin t| \leqslant t$, on a $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
c) En application des théorèmes classiques, $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[ \subset ]0,+\infty[$ donc $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{-1}{1+x^2}$.
d) $F(x) = -\arctan x + C^{te}$ sur $]0,+\infty[$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Par continuité en 0, $I = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 12 :** [énoncé]
a) On réalise le changement de variable $t = u + n\pi$ :
$u_n(x) = (-1)^n \int_0^\pi \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)} \frac{\sin u}{u+n\pi}\mathrm{d}u$. Ici $g_n(x,u) = \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}\frac{\sin u}{u+n\pi}$.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $u \in [0,\pi]$, $g_n(x,u) \geqslant 0$ et $g_{n+1}(x,u) \leqslant g_n(x,u)$ donc $u_n(x) = (-1)^n\,|u_n(x)|$ avec $(|u_n(x)|)$ décroissante. De plus $|u_n(x)| \leqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{n\pi} = \frac{1}{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^\star$) donc $|u_n(x)| \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Par application du critère spécial, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge et $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$ ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
c) Comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $U$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus $U(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ avec cette intégrale qui est définie quand $x > 0$ et il est connu qu'elle est convergente quand $x = 0$.
d) En application des théorèmes classiques, $U$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[ \subset ]0,+\infty[$ donc $U$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $U'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{-1}{1+x^2}$.
e) En primitivant $U(x) = C - \arctan x$ sur $]0,+\infty[$. Or
$|U(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $C = \pi/2$.
Par continuité en 0, $U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

**Exercice 13 :** [énoncé]
Réalisons le changement de variable $t = u(x) + \theta(v(x) - u(x))$ :
$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = (v(x) - u(x)) \int_0^1 f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x)))\,\mathrm{d}\theta$ or
$(x,\theta) \mapsto f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x)))$ est continue sur $I \times \mathbb{R}$ donc
$x \mapsto \int_0^1 f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x)))\,\mathrm{d}\theta$ est aussi continue puis enfin la fonction étudiée.

**Exercice 14 :** [énoncé]
a) Pour $x \geqslant 0$, $I(x)$ est définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Pour $x < 0$, $I(x)$ est une intégrale généralisée en $0^+$ avec $(\sin t)^x \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$.
Cette dernière converge si, et seulement si, $-x < 1$.
Ainsi $\mathcal{D} = ]-1,+\infty[$.
b) Posons $f : (x,t) \mapsto (\sin t)^x = \exp(x \ln(\sin t))$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(\sin t))^k\,(\sin t)^x$.
$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue sur $\mathcal{D} \times ]0,\pi/2]$ et pour tout $a > -1$,
$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant |\ln(\sin t)|^k\,(\sin t)^a$ pour tout $x \geqslant a$.
Par domination sur tout compact, on peut affirmer que $I$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
c) On définit la fonction $I$ qu'on appellera $J$ pour éviter une confusion avec le $i$ de Maple

```
J:=x->int(sin(t)^x,t=0..Pi/2);
```

Puis on calcule les valeurs demandées

```
seq(J(k),k=0..4);
```

d) Par intégration par parties $I(x+2) = \frac{x+1}{x+2} I(x)$.
e) Regardons les premiers termes

```
seq(J(n)*J(n-1),n=1..10);
```

On présume $I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ ce que l'on établit par récurrence.
f) Puisque $I(x) = \frac{x+2}{x+1} I(x+2)$, quand $x \to -1^+$, $I(x) \sim \frac{1}{x+1} I(1) = \frac{\pi}{2(x+1)}$.
Pour obtenir un équivalent de $I(x)$ quand $x \to +\infty$, commençons par étudier $I(n)$.
La fonction $I$ est décroissante et positive donc $I(n+1) \leqslant I(n) \leqslant I(n-1)$ puis $\frac{\pi}{2(n+1)} \leqslant I(n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2n}$ et enfin $I(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
Puisque $I(n+1) \sim I(n)$ et $I$ monotone, on a $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} I(\lfloor x \rfloor)$ et on en déduit $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

**Exercice 15 :** [énoncé]
a) L'intégrale converge pour $x > -1$ car $(\sin t)^x \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$.
b) Par domination sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > -1$, on obtient $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)(\sin t)^x \,\mathrm{d}t \leqslant 0$.
c) Posons $\varphi(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$.
Une intégration par parties classique (cf. intégrales de Wallis) donne $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.
Montrons que cette fonction est constante.
Soit $a \in \left]-1, 0\right[$, $\varphi(a+n) = \varphi(a)$.
En posant $p = E(a)$, la décroissance de $f$ donne
$\varphi(a) = \varphi(a+n) \leqslant (a+n+1)f(p+n)f(p+n+1)$
Or $(a+n+1)f(p+n)f(p+n+1) = \frac{a+n+1}{p+n+1}\varphi(n+p) = \frac{a+n+1}{p+n+1}\varphi(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0)$.
De façon semblable, $\varphi(a)$ peut être minorée par une suite de limite $\varphi(0)$.
On peut donc affirmer que $\varphi$ est constante.

**Exercice 16 :** [énoncé]
a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, $\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to 0}{=} O(1)$ et $\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $f(x)$ est bien définie.
b) $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$. $g$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\cos(xt)$.
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \varphi(t)$ avec $\varphi$ intégrable sur $]0, +\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, a fortiori continue et dérivable.
c) La décomposition $\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$ et la majoration $\sin(t) \leqslant t$ permettent d'appliquer le théorème de sommation terme à terme et de conclure
$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

**Exercice 17 :** [énoncé]
a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(z) \geqslant a\}$.
$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur $\Omega$ et pour $z \in \Omega_a$, $\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leqslant \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$ avec $\varphi$ intégrable sur $]0, 1]$ donc $f$ est définie et continue sur $\Omega$.
b) $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$ et $f(x+1) \xrightarrow[x\to-1]{} f(0)$ donc $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.
c) Par intégration par parties : $(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ et $\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2} \to 0$.

**Exercice 18 :** [énoncé]
Posons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.
Par domination, $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
Après décomposition, pour $x \neq 1$, $\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$.
Donc $f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2-1)}$ qui se prolonge par continuité pour $x = 1$.
Puisque $f(0) = 0$, on obtient la relation proposée.

**Exercice 19 :** [énoncé]
La fonction $f$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et $xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
Par domination sur tout compact, on obtient $g : x \mapsto xf(x) - \frac{\pi}{2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ donc $f$ aussi.

Quand $x \to +\infty$, $0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ donc $xf(x) \to \frac{\pi}{2}$ puis $f(x) \sim \frac{\pi}{2x}$.
Etudions maintenant $f(x)$ quand $x \to 0^+$.
Par le changement de variable $u = tx$,
$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2+u^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ avec $\varphi : u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$.
Par intégration par parties,
$f(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\varphi(u)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln(x^2+u^2)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.
Pour $x \in \left]0,1\right]$, $\left|\ln(x^2+u^2)\right| \leqslant \left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|$ et $u \mapsto \left(\left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|\right)\varphi'(u)$ est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ car $\varphi'$ peut être prolongée par continuité en 0 (en fait $\varphi$ peut-être prolongée en une fonction développable en série entière en 0) et $\varphi'(u) \sim \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ quand $u \to +\infty$.
Par suite, quand $x \to 0^+$, $f(x) = \ln x + O(1) \sim \ln x$.

**Exercice 20 :** [énoncé]
a) On applique la formule de Taylor reste-intégrale à $f$ en $a$.
b) On réalise le changement de variable : $t = a + \theta(x-a)$.
c) Posons

$$h(x,\theta) = \frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\theta) = \frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}(x-a)^k f^{(\alpha+k)}(a+\theta(x-a))$$

est définie et continue sur $I \times [0,1]$.
Par intégration sur un segment $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Exercice 21 :** [énoncé]
a) Posons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}$$

La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$$

avec $\psi$ intégrable sur $[0,+\infty[$.
On en déduit que $\varphi$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Par intégration par parties

$$\varphi(x) = -\frac{1}{ix} + \frac{1}{ix}\int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\right)\right| = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{2}{1+t^2}$$

On en déduit que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{ix^2} - \frac{1}{ix^2}\int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + ix\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2\mathrm{e}^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$$

Enfin, une dernière intégration par parties donne

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}\left[-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{itx}\right]_0^{+\infty} + i\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$$

et la relation voulue...
c) Par le changement de variable $u = tx$, on obtient l'expression proposée.
On peut décomposer

$$\varphi'(x) = i\int_0^1 \frac{u\mathrm{e}^{iu}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{iu}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{iu}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u\mathrm{e}^{iu}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{iu}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\left[\frac{u\mathrm{e}^{iu}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} = -\frac{\mathrm{e}^i}{x^2+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\mathrm{e}^i$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{iu}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

D'autre part

$$\int_0^1 \frac{u\mathrm{e}^{iu}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{u(\mathrm{e}^{iu}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\right]_0^1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{u(\mathrm{e}^{iu}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^1 \frac{\left|\mathrm{e}^{iu}-1\right|}{u}\,\mathrm{d}u < +\infty$$

Au final

$$\varphi'(x) = i\ln x + o(\ln x) + O(1) \underset{x\to 0^+}{\sim} i\ln x$$

d) En vertu de ce qui précède

$$\mathrm{Im}(\varphi'(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x \to -\infty$$

On en déduit que la fonction réelle /mp.cpgedupuydelome.fr n'est pas dérivable en 0, il en est a fortiori de même de $\varphi$.

**Exercice 22 :** [énoncé]

a) Posons $u : \mathbb{R}\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x,t) = \cos(x\sin\theta)$$

Puisque pour chaque $x\in\mathbb{R}$, l'application $t\mapsto u(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $[0,\pi]$, la fonction $f$ est bien définie.
La fonction $u$ admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\sin\theta\sin(x\sin\theta) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2\theta\cos(x\sin\theta)$$

et ces dernières sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ donc, par intégration sur un segment, la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$f'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

b) On remarque

$$f''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos^2\theta - 1)\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$x(f''(x)+f(x)) = \int_0^\pi \cos\theta.\left(\cos\theta\cos(x\sin\theta)\right)\,\mathrm{d}\theta$$

Par intégration par parties, on obtient

$$x(f''(x)+f(x)) = -f'(x)$$

On en déduit que $f$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$xy''(x)+y'(x)+xy(x) = 0$$

c) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}\,\mathrm{d}\theta$$

Puisque la série $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente, un argument de convergence normale permet une intégration terme à terme et donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \text{ avec } a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!\pi}\int_0^\pi (\sin\theta)^{2n}\,\mathrm{d}\theta$$

d) Nous pourrions calculer l'intégrale définissant $a_n$ car c'est une intégrale de Wallis, mais puisqu'on nous demande d'exploiter l'équation différentielle...
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, par dérivation d'une série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_{n+1}x^{2n+1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)(2n+1)a_{n+1}x^{2n}$$

L'équation $xf''(x)+f'(x)+xf(x) = 0$ donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((2n+2)^2a_{n+1}+a_n\right)x^{2n+1} = 0$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière de rayon de convergence $>0$, on obtient

$$(2n+2)^2a_{n+1}+a_n = 0$$

Sachant $a_0 = 1$, on conclut

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$$

**Exercice 23 :** [énoncé]
a) Par le changement de variable $t = ux$ (bijection de classe $\mathcal{C}^1$) on obtient

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

Posons $g : ]0,+\infty[\times]-1,1[\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

La fonction $g$ est continue sur $]0,+\infty[\times]-1,1[$ et

$$|g(x,u)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \varphi(u)$$

avec $\varphi$ intégrable sur $]-1,1[$.
On en déduit que $f$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
b) Soit $(x_n)$ une suite d'élément de $]0,+\infty[$ divergeant vers $+\infty$.
On a

$$f(x_n) = \int_{-1}^{1} f_n(u)\,\mathrm{d}u \text{ avec } f_n(u) = g(x_n,u)$$

Les fonctions $f_n$ sont continues par morceaux et convergent simplement vers $f_\infty : u \mapsto 0$ elle-même continue par morceaux. Puisque $|f_n| \leqslant \varphi$ avec $\varphi$ intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-1}^{1} f_\infty(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

Par la caractérisation séquentielle des limites, on obtient

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Une étude semblable donne aussi

$$f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{-1}^{1} = \pi$$

**Exercice 24 :** [énoncé]
a) $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est définie et continue sur $]0,1[$.
Quand $t \to 0^+$, pour $-x < y < 1$, $t^y \frac{t-1}{\ln t}t^x \sim \frac{t^{y+x}}{\ln t} \to 0$.
Quand $t \to 1^-$, posons $h = 1-t \to 0^+$, $\frac{t-1}{\ln t}t^x = -\frac{h}{\ln(1-h)}(1-h)^x \to 1$.
Donc $f$ est bien définie.
b) $g(x,t) = \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{e}^{x\ln t}$ est définie et continue sur $]-1,+\infty[\times]0,1[$.
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)\mathrm{e}^{x\ln t}$ est définie sur $]-1,+\infty[\times]0,1[$.
$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$,
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]-1,+\infty[$.
Pour $a > -1$, on a

$$\forall x \geqslant a, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant (1-t)t^a = \varphi_a(t)$$

avec $\varphi_a$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

d'où

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1} + C$$

Etudions $C = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ peut être prolongée par continuité sur $[0,1]$, elle y est donc bornée par un certain $M$ et alors

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 Mt^x\,\mathrm{d}x = \frac{M}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On en déduit $C = 0$.

**Exercice 25 :** [énoncé]
a) $\cos(xt)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(-1+i.x)t})$ et $\left|\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}\right| = \mathrm{e}^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Par suite $\int_0^{+\infty}\cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe et

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-i.x}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

b) $g(x,t) = \frac{\sin xt}{t}\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
$t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $a > 0$, $\forall x \in [-a,a]$, $|g(x,t)| \leqslant |x|\,e^{-t} \leqslant ae^{-t} = \varphi_a(t)$ avec $\varphi_a$ intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc par domination sur tout segment $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.
c) $\frac{\partial g}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $a > 0$,

$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |\cos xt.\mathrm{e}^{-t}| = \mathrm{e}^{-t} = \psi(t)$ avec $\psi$ intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$.
d) $F(0) = 0$ donc $F(x) = \arctan x$.

**Exercice 26 :** [énoncé]
On définit $f : \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\cos(xt)$$

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $t^2 f(x,t) \to 0$ et quand $t \to 0^+$, $f(x,t) \to b - a$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at})\sin(xt)$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at} + \mathrm{e}^{-bt} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ fonction intégrable.
On en déduit que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at})\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ct}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-c+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{c^2+x^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}$$

c) On en déduit

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C^{te}$$

Pour déterminer la constante, on étudie la limite de $F$ en $+\infty$. Posons

$$\psi(t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

ce qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée sur $]0, +\infty[$.
Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} \psi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\psi(t)\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \psi'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \psi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} |\psi'(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$

On peut conclure

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$$

**Exercice 27 :** [énoncé]
a) $t \mapsto g(x,t) = \mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = it^2\mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^2\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $z$ existe, est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$z'(x) = \int_0^{+\infty} it^2\mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}\,\mathrm{d}t \underset{\text{ipp}}{=} -\frac{1}{2(x+i)}z(x)$.
b)

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C\exp\left(i\frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right) = \frac{C\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Puisque $z(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{2(x^2+1)^{1/4}}$$

**Exercice 28 :** [énoncé]
a) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$. On obtient $z(0) = \sqrt{\pi}$.
b) $t \mapsto g(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}}{\sqrt{t}}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i.\sqrt{t}\mathrm{e}^{(-1+ix)t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $z$ existe, est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$z'(x) = \int_0^{+\infty} i.\sqrt{t}\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{ipp}}{=} \frac{i}{2(1-ix)}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(x+i)}z(x)$.
c) $\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$ donc
$z(x) = C\exp\left(i\frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right) = \frac{C\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$.
Puisque $z(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut $z(x) = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$.

**Exercice 29 :** [énoncé]
Posons
$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}$$
La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = it\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}$$
La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue et
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$
avec $\varphi$ intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de $x$.
On en déduit que la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et par une intégration par parties
$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}t$$
On en déduit que $g$ est solution de l'équation différentielle
$$g'(x) + xg(x) = 0$$
Après résolution de cette équation différentielle
$$g(x) = \lambda\mathrm{e}^{-x^2/2}$$
Enfin $g(0) = \sqrt{\pi}$ donne $\lambda = \sqrt{\pi}$.

**Exercice 30 :** [énoncé]
a) Posons
$$f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$
est définie sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$,
$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $O(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi $F$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$
est définie sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$
avec $\varphi$ continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$,
donc $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec
$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$
b) Pour $x \neq 1$
$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$$
d'où
$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$
ce qui est encore valable en 1 par continuité.
Par suite
$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1) + C$$
avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.
c) En intégrant par parties, on obtient $\pi\ln 2$.

**Exercice 31 :** [énoncé]
a) Posons
$$g(x,t) = \frac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}$$

Puisque $\cos x \geqslant 0$,

$$1 + 2t\cos x + t^2 \geqslant 1 + t^2$$

donc $t \mapsto g(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1]$.
De plus

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1 + 2t\cos x + t^2)}{t} = \cos x$$

on peut donc prolonger $t \mapsto g(x,t)$ par continuité en 0. Par suite $F(x)$ est bien définie.
La dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $[0,\pi/2] \times ]0,1]$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{2\sin x}{1 + 2t\cos x + t^2}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$,
$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$ et

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2 = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ est intégrable. Par domination $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Pour $x = 0$, $F'(0) = 0$.
Pour $x \neq 0$,

$$F'(x) = -\int_0^1 \frac{2\sin x}{1 + 2t\cos x + t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{2\sin x}{(t+\cos x)^2 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}t = -\left[2\arctan\frac{t+\cos x}{\sin x}\right]_0^1$$

Or

$$\arctan\frac{\cos x}{\sin x} = \arctan(\tan(\pi/2 - x))$$

avec $\pi/2 - x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ donc

$$\arctan\frac{\cos x}{\sin x} = \pi/2 - x$$

et

$$\arctan\frac{1+\cos x}{\sin x} = \arctan\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \pi/2 - x/2$$

Finalement

$$F'(x) = 2((\pi/2 - x) - (\pi/2 - x/2)) = -x$$

c)

$$F(0) = \int_0^1 \frac{2\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n\,\mathrm{d}t$$

or la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} t^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ puisque la série numérique satisfait au critère spécial ce qui permet d'écrire

$$|R_N(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+2}$$

d'où $\|R_N\|_\infty \to 0$.
Par suite

$$F(0) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

puis

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}$$

**Exercice 32 :** [énoncé]
a) Posons

$$g_n(x,t) = \frac{1}{(x^2+t^2)^n}$$

$t \to g_n(x,t)$ est définie continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et $g_n(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ donc l'intégrale définissant $I_n(x)$ existe.
b)

$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} = \left[\frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

c) $\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t) = \frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}$ existe sur $]0,+\infty[ \times [0,+\infty[$.
$t \mapsto \frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et pour tout $0 < a < b$,

$$\forall x \in [a,b], \left|\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par domination sur tout segment, $I_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ puis sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x)$$

d) $I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n+1}}$ avec $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda_{n+1} = \frac{2n+1}{2n}\lambda_n$ d'où

$$\lambda_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

**Exercice 33 :** [énoncé]
$f:(x,t)\to\frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\mathrm{e}^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^{+\star}$.
$t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
Pour $a>0$,
$$\forall x\in[a,+\infty[\quad\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\mathrm{e}^{-at}=\varphi_a(t)$$
avec $\varphi_a$ intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Par domination $x\mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}$$
Donc $F(x,y)=-\ln x+C^{te}$ et puisque pour $x=y$, on a $F(x,y)=0$ on obtient
$$F(x,y)=\ln y-\ln x$$

**Exercice 34 :** [énoncé]
Posons $g(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$. $t\mapsto g(x,t)$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et $x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
Pour $x\in[0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$ avec $t\mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x)=\int_0^{+\infty}-t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$.
Par intégration par parties,
$\varphi'(x)=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}x\varphi(x)$.
$\varphi$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\varphi(0)=\sqrt{\pi}/2$ on conclut $\varphi(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$.

**Exercice 35 :** [énoncé]
Posons $g(x,t)=\frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$.
$x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
$t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
$|g(x,t)|\leqslant\frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2}$ sur $[-a,a]$ avec $t\mapsto\frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2}$ intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut donc affirmer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est évident que $f$ est paire. Nous poursuivons son étude sur $\mathbb{R}^+$.
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ est bien définie.
$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$,
$t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{2bt^2}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ sur $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+\star}$ avec $t\mapsto\frac{2bt^2}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ intégrable.
Par domination sur tout segment de $\mathbb{R}^{+\star}$, on peut affirmer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$
En réalisant la décomposition en éléments simples (pour $x\neq1$),
$f'(x)=\frac{\pi}{x+1}$ et cette relation est aussi valable pour $x=1$ par continuité.
Sachant que $f(0)=0$ et que $f$ est paire, on obtient $f(x)=\pi\ln(1+|x|)$.

**Exercice 36 :** [énoncé]
a) $f(x,t)=\ln(1+x\sin^2t)$ est définie et continue sur $[0,\pi/2]\times[0,+\infty[$.
Par intégration sur un segment $F$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\sin^2t}{1+x\sin^2t}$ est définie et continue sur $[0,\pi/2]\times]0,+\infty[$.
Par intégration sur un segment $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et
$F'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2t}{1+x\sin^2t}\,\mathrm{d}t$.
Par le changement de variable $u=\tan t$, $F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)}$.
Après décomposition simple et calcul, $F'(x)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$.
c) On remarque que $\ln(1+\sqrt{1+x})'=\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$ donc
$F(x)=\pi\ln(1+\sqrt{1+x})+C^{te}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par continuité en 0 et sachant $F(0)=0$, on parvient à conclure.

**Exercice 37 :** [énoncé]
a) La fonction $\varphi:x\mapsto\frac{1-\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $\varphi(x)=O(1/x^2)$ quand $x\to+\infty$ et $\varphi(x)\xrightarrow[x\to0]{}1/2$ et $g(x,t)=\mathrm{e}^{-tx}\frac{1-\cos x}{x^2}$ est dominée par $\varphi$.
Sachant, $t\mapsto g(x,t)$ continue, on conclut que $F$ est continue. De plus
$\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{t\to+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}x=0$.
b) Pour $a>0$, sur $[a,+\infty[$, pour $k=1,2$ : $\left|\frac{\partial^kg}{\partial t^k}(x,t)\right|\leqslant x^k\mathrm{e}^{-ax}\varphi(x)=\psi_k(x)$ donc $F$ est fois dérivable et $F''(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}(1-\cos x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}$.
c) On a $F'(t)=\ln t-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$ car $F'(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ et
$F(t)=t\ln t-t\ln\sqrt{t^2+1}-\arctan t+\frac{\pi}{2}$ car $F(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.
Par continuité, $F(0)=\pi/2$.
$\int_0^A\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{2\sin^2(x/2)}{x}\right]_0^A+\int_0^A\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ donc quand $A\to+\infty$, on obtient :
$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ d'où $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Document2

**Exercice 38 :** [énoncé]
a) $f$ est définie pour $x>0$.
b) Par domination sur tout segment, on obtient aisément $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}-t\ln t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$xf'(x)=\left[t\ln t\,\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty}-f(x)-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$xf'(x)+f(x)+\frac{1}{x}=0$$

c) On obtient la valeur de $f(1)$ par

```
int(ln(t)*exp(-t),t=0..infinity);
```

On résout l'équation différentielle

```
dsolve({x*D(f)(x)+f(x)+1/x,f(1)=-gamma},f(x));
```

On en déduit $f(x)=-\frac{\gamma+\ln x}{x}$.
d) On peut commencer en exprimant $f$ via le changement de variable $u=xt$.
On a

$$xf(x)=\int_0^{+\infty}\ln u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\ln x\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

qui conduit au même résultat que ci-dessus sachant

$$\int_0^{+\infty}\ln u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=-\gamma$$

**Exercice 39 :** [énoncé]
a) Pour $x>0$, $t^2\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donne l'intégrabilité de $t\mapsto\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}$.
Pour $x=0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente bien que $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.
b) Pour $x\in[a,+\infty[\,\subset\,]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\right)\right|\leqslant\mathrm{e}^{-ax}=\varphi(x)$$

avec $\varphi$ intégrable. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale et conclure que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
c) Pour $x>0$,

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}-\sin(t)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t=\mathrm{Im}\left(-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-x+i)t}\mathrm{d}t\right)=-\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x)=C-\arctan x$.
Or

$$|f(x)|\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

donc

$$C=\frac{\pi}{2}$$

d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Posons

$$u_n(t)=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établir que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction $f$, est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

(intégrale de Dirichlet).

**Exercice 40 :** [énoncé]
La fonction $\varphi:t\mapsto\frac{\mathrm{e}^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, vérifie $\varphi(t)\underset{t\to0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t^2\varphi(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $\varphi$ est intégrable. Ceci assure l'existence de $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ puis de $f(x)$ et $g(x)$ qui en sont les parties réelles et imaginaires. Les théorèmes d'usage assurent que $F$ est $\mathcal{C}^1$ et une intégration par parties donne $F'(x)=-\frac{1}{2(x+i)}F(x)$. La résolution de cette équation différentielle avec $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donne $F(x)=\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$ d'où $f(x)$ et $g(x)$.

**Exercice 41 :** [énoncé]
$f$ est définie pour $x > -1$.
Par les théorèmes d'usage, on montre que $f$ est $\mathcal{C}^1$ en observant une domination sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > -1$. On obtient $f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$ puis $f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C$.
Quand $n \to +\infty$, le théorème de convergence dominée donne $f(n) \to 0$ donc $C = 0$. Finalement $f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}$ dont l'étude est désormais facile.

**Exercice 42 :** [énoncé]
$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [-a, a]$

$$\left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\left|\ln(a^2+t^2)\right| + \left|\ln(t^2)\right|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi$ intégrable. Par suite $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est immédiat que $f$ est paire. Poursuivons, en étudiant $f$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
$x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec $\psi$ intégrable. Par suite $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.
En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi \ln(x+1)$$

pour $x \in \mathbb{R}^+$ en exploitant un argument de continuité.

**Exercice 43 :** [énoncé]
Posons $f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t} \,\mathrm{d}t$.
Pour $|x| > 1$, l'intégrale ne peut pas être définie.
Pour $|x| \leqslant 1$
En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.
Pour $x = -1$ :
Quand $t \to 0^+$, $\ln(1-\cos t) \sim 2\ln t$
Quand $t \to 2\pi^-$, $t = 2\pi - h$, $\ln(1-\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$
Pour $x = 1$, quand $t \to \pi$,$t = \pi + h$, $\ln(1+\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$.
Finalement $f$ est définie sur $[-1, 1]$.
Pour des raisons de symétrie, $f(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t} \,\mathrm{d}t$
Par domination sur $[-a, a]$ avec $a < 1$, $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et $f'(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t}$.
Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$, $f'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)+x(1-u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$.
Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi \arcsin x$.

**Exercice 44 :** [énoncé]
a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$$

La fonction $f$ est définie et continue sur $]-1, +\infty[ \times [0, 1]$.
Pour $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]-1, +\infty[ \times [0, 1]$.
Par intégration sur un segment, on peut affirmer que la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^1 f(x,t) \,\mathrm{d}t$$

est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} \,\mathrm{d}t$$

Par décomposition en éléments simples (en la variable $t$)

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(x^2+1)(1+xt)} + \frac{x+t}{(x^2+1)(1+t^2)}$$

donc
$$F'(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} + \frac{\pi}{4}\frac{x}{x^2+1} + \frac{\ln 2}{2}\frac{1}{1+x^2}$$
Puisque $F(0) = 0$, on peut écrire
$$F(x) = \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{8}\ln(x^2+1) + \frac{\ln 2}{2}\arctan x$$
b) Pour $x = 1$, la relation précédente donne
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

**Exercice 45 :** [énoncé]
a) Posons $f : \mathbb{R}\times ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,t) = \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)$$
La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}\times ]0,+\infty[$ et
$$|f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$
avec $\varphi$ intégrable sur $]0,+\infty[$.
On peut donc affirmer que $F$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2}\exp\left(-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right)$$
La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times ]0,+\infty[$ et pour $x\in[a,b]\subset ]0,+\infty[$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{t^2}\exp\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)\exp\left(-t^2\right) = \varphi_{a,b}(t)$$
La fonction $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (notamment car de limite nulle en $0^+$) donc on peut affirmer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et
$$F'(x) = -2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right)\,\mathrm{d}t$$
c) Procédons au changement de variable $u = x/t$ (bijection de classe $\mathcal{C}^1$)
$$F'(x) = -2\int_0^{+\infty}\exp\left(-\left(\frac{x^2}{u^2}+u^2\right)\right)\,\mathrm{d}u = -2F(x)$$
d) On en déduit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x>0, F(x) = \lambda \mathrm{e}^{-2x}$$
Puisque $F$ est paire et continue en 0, on obtient
$$\forall x\in\mathbb{R}, F(x) = F(0)\mathrm{e}^{-2|x|}$$

**Exercice 46 :** [énoncé]
Sachant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ on a
$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \ldots = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$ donc
$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2^{n-1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

**Exercice 47 :** [énoncé]
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$ puis $\Gamma'(2) = 1-\gamma$.

**Exercice 48 :** [énoncé]
Pour tout $t>0$, la fonction $x\mapsto t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$ est convexe donc pour tout $a,b\in ]0,+\infty[$ et tout $\lambda\in[0,1]$, $t^{\lambda a+(1-\lambda)b-1} \leqslant \lambda t^{a-1} + (1-\lambda)t^{b-1}$ puis $t^{\lambda a+(1-\lambda)b-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \lambda t^{a-1}\mathrm{e}^{-t} + (1-\lambda)t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$. En intégrant sur $]0,+\infty[$, on obtient $\Gamma(\lambda a+(1-\lambda)b) \leqslant \lambda\Gamma(a) + (1-\lambda)\Gamma(b)$.

**Exercice 49 :** [énoncé]
Pour $x>0$, la fonction $t\mapsto(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
En effet $t^2\times(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{(\ln t)^k}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$.
Posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.
Pour tout $x>0$ : $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux.
Pour tout $t>0$ : $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue.
Pour tout $[a,b]\subset ]0,+\infty[$ et tout $(x,t)\in[a,b]\times ]0,+\infty[$ :
$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant (\ln t)^k(t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi_k(t)$ avec $\varphi_k$ intégrable sur $]0,+\infty[$.
Par domination, $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

**Exercice 50 :** [énoncé]

a) Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
En effet $t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et $(\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{(\ln t)^k}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$.
Ainsi la fonction $\Gamma$ est définie sur $]0, +\infty[$.
Posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.
Pour $[a, b] \subset ]0, +\infty[$, on a $t^{x-1} \leqslant t^{a-1}$ ou $t^{x-1} \leqslant t^{b-1}$ selon que $t \leqslant 1$ ou $t \geqslant 1$.
Dans les deux cas $t^{x-1} \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}$ et donc $|f(x,t)| \leqslant f(a,t) + f(b,t) = \varphi(t)$ avec $\varphi$ intégrable.
Par domination : $\Gamma$ est continue sur $]0, +\infty[$.
b) Pour $k = 1$ ou $2$.
$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}$.
Pour tout $x > 0$ : $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux.
Pour tout $t > 0$ : $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue.
Pour tout $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ et tout $(x,t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$ :
$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant (\ln t)^k (t^{a-1} + t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi_k(t)$ avec $\varphi_k$ intégrable sur $]0, +\infty[$.
Par domination $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
c) La dérivée seconde de $\ln \Gamma(x)$ est du signe de $\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\left(\int_0^{+\infty} \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\sqrt{(\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\right)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$.
Ainsi $\Gamma'(x)^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$ et donc $(\ln \Gamma(x))'' \geqslant 0$.
Finalement $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ est convexe.

**Exercice 51 :** [énoncé]

a) Puisque $\ln(1 + u) \leqslant u$, on a

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(-(n-1)\frac{t}{n}\right) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t/n} \leqslant \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}$$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ est limite simple de la suite de fonction $(u_n)$ définie par $u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ si $t \in ]0, n[$ et $u_n(t) = 0$ sinon.
Puisque $|\ln(t)u_n(t)| \leqslant \mathrm{e}.\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$, par convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \ln(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

c) Par le changement de variable $u = nt$

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int_\varepsilon^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = [\ln(u)(1-(1-u)^n)]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u$$

On notera que la fonction $u \mapsto n(1-u)^{n-1}$ est primitivée en $(1-(1-u)^n)$ qui s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties donne à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$

$$\int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u$$

d) Par le changement de variable $u = 1 - v$

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^n - 1}{v - 1}\,\mathrm{d}v = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,\mathrm{d}v$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$$

**Exercice 52 :** [énoncé]

a) $g(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Pour $t \in [a,b]$, $\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|^k \mathrm{e}^{-t}\left(t^{a-1}1_{]0,1[} + t^{b-1}1_{[1,+\infty[}\right) = \varphi_k(t)$.
$t^2\varphi_k(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et pour $0 < \alpha < a$, $t^{1-\alpha}\varphi_k(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ donc $\varphi_k$ est intégrable.
Par théorème, $\Gamma$ est $\mathcal{C}^\infty$.
b) Par ipp, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Sachant $\Gamma(1) = 1$, on obtient par récurrence $\Gamma(n+1) = n!$.
c) Par le changement de variable proposé $\Gamma(n+1) = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y$ avec :
$f_n(y) = 0$ sur $]-\infty, -\sqrt{n}]$, $f_n(y) = \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n$ sur $]-\sqrt{n}, +\infty[$.
Sur $]-\sqrt{n}, 0]$, une étude fonctionnelle montre $n\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leqslant -\frac{y^2}{2}$ qui donne $0 \leqslant f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}$.

Sur $[0,+\infty[$, une étude fonctionnelle montre $n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)-y\sqrt{n}\leqslant -y+\ln(1+y)$ pour $t\geqslant 1$. Cela donne $0\leqslant f_n(y)\leqslant(1+y)\mathrm{e}^{-y}$.

d) La fonction $\varphi : y\to\begin{cases}\mathrm{e}^{-y^2/2} & \text{si } y\leqslant 0\\ (1+y)\mathrm{e}^{-y} & \text{sinon}\end{cases}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Quand $n\to+\infty$, en réalisant un DL du contenu de l'exponentiel :
$f_n(y)=\mathrm{e}^{-y\sqrt{n}+n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)}\to\mathrm{e}^{-y^2/2}$.

Par convergence dominée : $\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(y)\,\mathrm{d}y\to\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{2\pi}$ d'où
$\Gamma(n+1)=n!\sim\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}$. Etudes.doc

**Exercice 53 :** [énoncé]

a) $a=\alpha+i\beta$ avec $\alpha>0$ et $\beta\in\mathbb{R}$.

$a+n=|a+n|\,\mathrm{e}^{i\theta_n}$ avec $|a+n|=\sqrt{(\alpha+n)^2+\beta^2}=n+\alpha+O\left(\frac{1}{n}\right)$ et
$\theta_n=\arctan\frac{\beta}{a+n}=\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$u_n=a\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln|a+k|+i\theta_k\right)=$
$a\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln k+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\alpha}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)+i\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$.

Ainsi $u_n=an!\exp\left(\alpha\ln n+i\beta\ln n+\chi+o(1)\right)$ et donc $u_n\sim A(a)n!n^a$ avec
$n^a=\exp(a\ln n)$ et $A(a)\in\mathbb{C}^\star$.

b) Notons $H=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}z>0\}$. Pour $z\in H$, on a $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Par convergence dominée, on montre que $\Gamma(z)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable, $\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t=n^z\int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u$ puis par intégrations par parties successives $\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t=\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.

On en déduit que pour $z=a$, $\Gamma(z)=\frac{1}{A(a)}$.

On en déduit en particulier que $\Gamma(z)\neq 0$ mais aussi que $a(a+1)\dots(a+n)\sim\frac{n^a n!}{\Gamma(a)}$.